SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. Obtener los cinco primeros términos de las sucesiones dadas por los siguientes términos generales:

   (a) $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ **(b)** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ **(c)** $\dfrac{1}{n!}$

   (d) $(-1)^{n+1}(2n-1)$ **(e)** $(-1)^n\,\dfrac{n+1}{n}$ **(f)** $\dfrac{n!}{n^n}$

   (g) $a_n = \begin{cases} n & \text{si n es impar} \\ 1/n & \text{si n es par} \end{cases}$ **(h)** $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2+2}, \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$

2. Determinar el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son:

   (a) $\frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{7},\ \ldots$ **(b)** $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$

   (c) $1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ \ldots$ **(d)** $\frac{3}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{27}{8},\ \frac{81}{16},\ \frac{243}{32},\ \ldots$

   (e) $-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ -\frac{5}{6},\ \frac{7}{8},\ -\frac{9}{10},\ \ldots$ **(f)** $1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2^6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{2^8},\ \ldots$

3. Determinar cuáles de las sucesiones del ejercicio 2 son monótonas.

4. Determinar cuáles de las sucesiones (a), (b) y (c) del ejercicio 2 son acotadas encontrando cotas en cada caso.

5. Dada la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\varepsilon_1 = 1/16$ ¿existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq n_0$ se verifica que
$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon_1 = 1/16?$$
   ¿Y para $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{25}$ y $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{90}$? ¿Y, en general, para un $\varepsilon > 0$?

   ¿Qué conclusión se tiene sobre la convergencia de $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$?

6. Demostrar, utilizando la definición de límite:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n^2+1)}{2n+1} = 0$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 = +\infty$ **(d)** $\lim\limits_{n\to\infty} (-n)^3 = -\infty$

7. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

(a) $\left\{(-1)^n\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ **(b)** $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ **(a)** $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

(b) $\{(-1)^{n+1}\cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$ **(c)** $\{(-1)^n n\cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$ **(d)** $\left\{\frac{\cos(n\pi)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

8. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+6n)$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\pi}{n^3+2n-1}$ **(c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+5}{2n+1}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-8}{2n^2+7n+1}$ **(e)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\cdot\log n$ **(f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n^2}-5^n\right)$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+5^n}$ **(h)** $\lim\limits_{n\to\infty}5^n\cdot\frac{(n+1)^3}{2n^3+3}$ **(i)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{-n}}\cos((2n-1)\pi)$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ **(k)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ **(l)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$

(m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{5}{3}\right)^n$ **(n)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2n}$ **(ñ)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$

(o) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+7^n}{5^n}$ **(p)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n+2^{n+2}}{4^{n+1}+8^{n-1}}$ **(q)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^n$, $a\in\mathbb{R}$

9. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(\pi n+1)}{n^2}$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n^2+1}\operatorname{sen} n^3}{2^n}$ **(c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\arctan\left(\frac{n^2\ln n}{\sqrt{n}}\right)$

10. Aplicando la regla del sandwich, calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{(n+1)^3}+\frac{2n^2}{(n+1/2)^3}+\cdots+\frac{2n^2}{(n+1/n)^3}\right)$

11. Estudiar la convergencia y calcular el límite de las sucesiones recurrentes:

(a) $\begin{cases} a_1 = 1/4, \\ a_{n+1} = 1/4 + a_n^2, \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} a_1 = 4, \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n} - 1, \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$ **(d)** $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2}, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} a_1 = \frac{2}{5}, \\ a_{n+1} = \frac{2}{5}(a_n^2 + 1), \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$ **(f)** $\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 2}, \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + a_n^2}, \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$

12. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$ **(c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n^2}{n^3+1}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{n+1}{n}\right)$ **(e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n^2+1}{(n+1)^2}\right)$ **(f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n+1}{8n^2+1}\right)^{1/3}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^3}\right)^{n^2}$ **(h)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^2+1}\right)^{2n}$ **(i)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$

13. Calcular los siguiente límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right)$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} (3^n - n!)$ **(c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^n - n!}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$ **(e)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 e^{-n}$ **(f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2^n}{e^n}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3\ln n}}$ **(h)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n!}\,\frac{1}{n^2}$ **(i)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^n$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n/4}$ **(k)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-2}\right)^{\frac{n^5+1}{n^2+1}}$ **(l)** $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+n)^{\frac{1}{n}}$

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{1/n}$ **(n)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$ **(ñ)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} + \sqrt[n]{\frac{2}{3}}\right)$

(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+1}$ **(p)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ **(q)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!\sqrt{n}}$

14. Calcular, si existen, los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{n^2+5n}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n^2}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2n+2}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{1+(n+1)!}+\frac{n!}{2+(n+1)!}+\cdots+\frac{n!}{n+(n+1)!}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$ **(f)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$ **(g)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\frac{n}{n^2+1}\right)^n$

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ **(i)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n+7^n}$ **(j)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n}+4n)}{2n^2+1}$

(k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2^n}}$ **(l)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{4n}{2n}}$ **(m)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos^3 n}{n^3}$

(n) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^2+1}$ **(ñ)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n-1}+3^n}{5^{n-2}+6^{n+1}}$ **(o)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^n\operatorname{sen}\frac{1}{n!}+\ln n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)$

15. Sea a_n el número de instrucciones de un algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. El algoritmo actúa de la siguiente forma:

- para un solo dato de entrada, necesita una instrucción,
- para n datos de entrada, realiza $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo.

Se pide:

i) Definir la sucesión $\{a_n\}$ y estudiar su monotonía y acotación.

ii) Sabiendo que se verifica $|a_n-2n^2|<2n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2}$.

16. Los puntos $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$ y $P_3(0,0)$ determinan un triángulo. Sea P_4 el pie de la perpendicular trazada desde P_3 al segmento $\overline{P_1P_2}$; en general, sea P_{n+1} el pie de la perpendicular trazada desde P_n al segmento $\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$. Se genera así una sucesión de puntos $\{P_n\}$.

Sabiendo que $\{P_n\}$ es una sucesión convergente, calcular las coordenadas del punto límite.